TD T3 - Thermodynamique

Conduction thermique

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

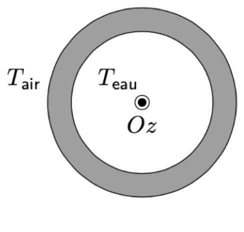
1. Définir l'équilibre thermodynamique local. Quelle conséquence cela a-t-il sur les grandeurs intensives ?
2. Définir le flux thermique et le vecteur densité de flux thermique. Donner la relation qui existe entre eux, et celles les reliant au transfert thermique à travers une surface S.
3. Donner la loi de Fourier. Donner des ordres de grandeurs pour la conductivité thermique.
4. Quelle grandeur est continue à l'interface entre deux milieux ? Qu'est-ce qu'un contact thermique parfait ?
5. Etablir l'équation de la diffusion thermique en 1D cartésienne.
6. Définir un temps et une longueur caractéristiques et donner la relation qui les lie.
7. Que peut-on dire du flux thermique en régime stationnaire ? Le démontrer.
8. Définir la résistance thermique d'un système. Faire un schéma.
9. Définir l'association en série et en parallèle de deux système thermiques. Donner la résistance équivalente à ces associations

Exercices de cours - Savoirs-Faire

SF 1 - Déterminer l'expression de la température en régime stationnaire 1D

On considère un mur d'épaisseur e et de section $\mathcal{S}$ en régime stationnaire, séparant l'extérieur à T_{ext} et l'intérieur d'une habitation à T_{int}.
On considère que le problème est à une dimension, qu'on notera x.
Déterminer $T(x)$ pour $x \in [0, e]$ en supposant que les contacts thermiques en $x = 0$ et $x = e$ sont parfaits.

Problème 1D cylindrique



On s'intéresse à un tuyau de chauffage en cuivre de longueur totale L, de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2. Déterminer l'expression de $T(r)$ en supposant la continuité de la température en R_1 et R_2.

SF 2 - Déterminer l'expression d'une résistance thermique

Calculer la résistance thermique d'un mur d'épaisseur e, de surface S, fait dans un matériau de conductivité thermique λ.

Problème 1D cylindrique Calculer la résistance thermique du tuyau de chauffage étudié précédemment. Cette conduite est cylindrique de longueur L, de rayon interne et externe $R_1 < R_2$, faite dans un matériau de conductivité λ.

SF 3 - Déterminer la résistance équivalente d'une association série de composants

Un double vitrage est constitué de deux vitres en verre séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e.

1. Justifier qu'il s'agit d'une association en série. Calculer la résistance thermique.
2. La comparer à celle d'un simple vitrage de même épaisseur totale $3e$. Commenter.

Données :conductivités thermiques de l'air $\lambda_a = 3.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1} et du verre $\lambda_v = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}

SF 4 - Déterminer la résistance équivalente d'une association parallèle de composants

Un mur en béton, de dimensions 5 m$\times$3 m, de résistance thermique $R_m = 2.10^{-2}$ K.W^{-1} est percé d'une fenêtre carrée de côté 20 cm en vitrage simple de résistance thermique $R_f = 8.10^{-2}$ K.W^{-1}.

1. Comment expliquer que la résistance thermique du mur soit plus faible que celle de la fenêtre, alors que le béton est un meilleur isolant thermique que le verre et que le mur est plus épais que la fenêtre ?
2. Calculer la résistance thermique totale. Quelle proportion des pertes thermiques est imputable à la fenêtre ?

SF 5 - Prendre en compte une production d'énergie interne au système dans un bilan

Un fusible est un élément de sécurité des circuits électriques, qui a pour rôle d'ouvrir le circuit lorsque le courant devient accidentellement trop élevé pendant une certaine durée. On utilise pour cela un alliage métallique dont la température de fusion est nettement inférieure à celle du cuivre.
Considérons un fusible cylindrique de rayon a, et raisonnons sur un tronçon élémentaire de longueur dz. Ce tronçon échange un flux thermique par conduction, et est chauffé par effet Joule avec une puissance volumique $p = \dfrac{I^2}{\gamma S^2}$ (γ conductivité électrique). Il est en contact avec l'air extérieur à la température T_0.

Exprimer le transfert thermique δQ reçu par le tronçon de fusible pendant une durée élémentaire dt.

SF 6 - Prendre en compte le flux conducto-convectif dans un bilan

On reprend l'étude du fusilble du SF précédent, en prenant en compte en plus le flux conducto-convectif sur la surface latérale, décrit par la loi de Newton : $\overrightarrow{j}_{cc} = h(T - T_0)\overrightarrow{n}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{n}$ dans le repérage adapté.
2. Donner la nouvelle expression de δQ.

SF 7 - Exploiter la relation entre le temps et la distance caractéristique

On veut faire cuire une énorme citrouille pour Halloween, pesant 3,5 kg. L'an passé, la citrouille pesait 2,5 kg et était (bien) cuite au bout d'une heure 30.

1. Proposer des hypothèses raisonnables et trouver la loi de variation liant le temps de cuisson avec la masse de la citrouille à cuire. Déterminer le temps de cuisson de la citrouille de 3,5 kg.
2. Que pensez-vous des lois de cuisson du type « tant de minutes par kilo » généralement proposées par les manuels de cuisine ? En suivant une telle loi, les grosses citrouilles sont-elles trop ou trop peu cuites ?

C'est l'anniversaire de votre petit frère ou petite sœur ! Iel invite ses copines et copains pour fêter l'événement. Pris·e d'un élan de bonté, vous décidez de confectionner un délicieux gâteau. Seulement voilà, la recette dont vous disposez est pour 4 personnes (temps de cuisson conseillé 30 min) et les ami·es seront 8 autour de la table.

3. Quel temps de cuisson allez-vous adopter ?

Exercices phares

Exercice 1 - Plancher chauffant

Un plancher chauffant est un système de chauffage des bâtiments par le sol dans lequel l'énergie de chauffage est transmise au plancher via un réseau hydraulique circulant sous le plancher (des systèmes de chauffage électrique existent également). Dans les constructions modernes, bien isolées, la température de l'eau peut être relativement basse, entre 21 et 24°C, ce qui rend le plancher chauffant particulièrement adapté aux chauffages écologiques de nouvelle génération comme la géothermie et le chauffage solaire. Cet exercice a pour but d'étudier une installation, destinée à chauffer une salle de vie de 40 m^2 au sol.
Pour simplifier, le réseau hydraulique est modélisé par une couche de température uniforme à $T = T_{eau}$

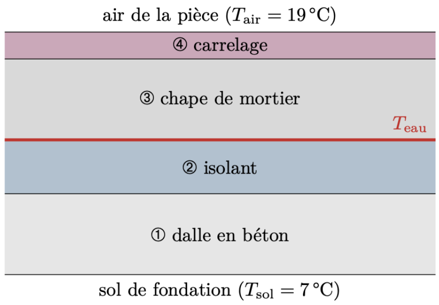
On suppose un contact thermique parfait entre les différents matériaux de la construction. En revanche, les transferts thermiques entre le carrelage et l'air de la pièce sont décrits par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc} = h(T_s - T_{air})\vec{u}$$

avec $h = 10$ W.K^{-1}.m^{-2} le coefficient d'échange conducto-convectif, T_s la température de surface du carrelage, T_{air} celle de l'air de la pièce et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du carrelage vers l'air.

1. Montrer que la loi de Newton se traduit par une résistance thermique d'interface R_i dont on établira l'expression en fonction de h et S ?
2. Donner le schéma électrique équivalent de l'installation. En déduire la résistance thermique totale R entre la « couche » d'eau et l'air de la pièce. La calculer numériquement.

Dans une région au climat assez doux, une pièce de 40 m^2 bien isolée nécessite en hiver une puissance de chauffe de l'ordre de 1 kW, alors qu'une maison mal isolée consomme quatre fois plus.

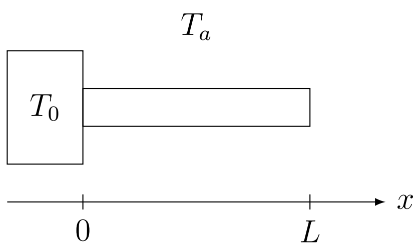


Matériau	**Conductivité λ** (W.m^{-1}.K^{-1})	**Épaisseur e** (cm)
④ Carrelage	1,3	1
③ Mortier	1,1	3
② Isolant	0,02	2
① Béton	1,4	10

3. En déduire la température T_{eau} à laquelle se trouve l'eau du circuit de chauffage pour chauffer la maison bien isolée.
4. Les normes d'installation d'un plancher chauffant imposent que la température de surface du carrelage T_s n'excède pas 28°C, ce qui correspond à la température de la plante des pieds. Quelle puissance maximale l'installation peut-elle fournir à l'habitation ? Commenter.
5. Bien qu'une couche isolante soit placée sous les tuyaux de chauffage, une partie de l'énergie fournie par le plancher chauffant est perdue car cédée aux fondations. Proposer une définition du rendement du plancher chauffant et le calculer.
6. Le choix du revêtement du sol est essentiel pour une bonne efficacité du plancher chauffant. En particulier, il est déconseillé d'utiliser un parquet en bois (conductivité de l'ordre de 0,2 W.m^{-1}.K^{-1}). Proposer une explication.

Exercice 2 - Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important de certains appareils et évacuer la chaleur vers l'atmosphère, on a souvent recours à un dispositif (radiateur) constitué d'ailettes de refroidissement, que l'on fixe à l'appareil que l'on souhaite refroidir. Dans cet exercice, on étudie une unique ailette de refroidissement constituée d'un matériau métallique de conductivité λ, de section rectangulaire (cotés a et e avec $a \gg e$) et de longueur L, est soudée en $x = 0$ à la paroi d'une source chaude de température constante T_0.



On se place en régime stationnaire et on suppose que la température est uniforme sur une section droite de l'ailette d'abscisse x : $T(x, y, z, t) = T(x)$.
L'ailette baigne dans l'air de température constante T_a. À l'abscisse x, l'échange de transfert thermique entre l'ailette à la température $T(x)$ et l'air ambiant de température T_a se fait par un flux conducto-convectif où la puissance cédée au milieu extérieur à travers une surface dS est : $d\mathscr{P} = h(T(x) - T_a)dS$.

Données : $L = 20$ cm, $a = 10$ cm et $e = 2$ mm ; $h = 100$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $\lambda = 16$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $T_0 = 65$°C et $T_a = 15$°C.

1. Déterminer l'équation différentielle régissant le champ de température $T(x)$ dans l'ailette. On fera apparaître une distance δ caractéristique du problème, que l'on exprimera en

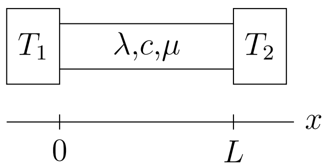
fonction de λ, h et e. Comparer la valeur numérique de δ et celle de la longueur L de l'ailette.

2. Déterminer le champ de température $T(x)$ dans l'ailette.
3. Calculer le flux thermique total φ_{ailette} évacué par l'ailette.
4. En l'absence d'ailette, la source de température T_0 serait directement au contact de l'atmosphère par l'intermédiaire d'une surface d'échange équivalente ae. Que vaudrait le flux φ_0 évacué vers l'atmosphère ?
5. Proposer une définition de l'efficacité η de l'ailette et en donner une expression. À quelle condition l'ailette est-elle efficace ?
6. Comparer le flux diffusif axial et le flux conducto-convectif transverse. En déduire une condition de validité de l'hypothèse d'uniformité de la température sur une section droite de l'ailette.
7. Calculer l'efficacité de l'ailette et discuter la validité des hypothèses faites. Proposer, si nécessaire, une modification du modèle.

Exercices en plus

Exercice 3 - Régime quasi-stationnaire dans une barre

Pour commencer, proche du cours avec régime quasi-stationnaire



Considérons deux solides assimilés à des thermostats de températures respectives T_1 et T_2, reliés par une barre cylindrique de rayon a et de longueur L, faite d'un matériau de conductivité thermique λ, capacité thermique massique c et masse volumique μ. L'ensemble est calorifugé.

1. Établir l'équation de la diffusion thermique dans la barre.

On suppose maintenant que le régime stationnaire est atteint.

2. Établir l'expression de la résistance thermique de la barre.

On suppose maintenant que la température T_2 n'est pas constante mais que l'ARQS thermique est vérifiée.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_2(t)$. Mettre en évidence une durée caractéristique τ.
4. Donner ou établir une durée τ_{diff} caractéristique de la diffusion thermique dans la barre.
5. Que doivent vérifier τ et τ_{diff} pour pouvoir rester dans l'ARQS ? En déduire des conditions sur les paramètres. Interpréter.

Exercice 4 - Assemblée de manchots

Face à une température extérieure basse (air et sol) ($\theta_e = -20$ °C), le manchot, animal à sang chaud, maintient sa température interne ($\theta_i = 37$ °C) au moyen d'un apport métabolique $\mathscr{P}_{\text{méta}} = 50$ W qui compense les pertes par conduction thermique au travers d'un revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1$ cm et de conductivité λ.
On modélise le corps du manchot (sans les plumes) par un parallélépipède de section carrée de côté $a = 10$ cm et de hauteur $h = 50$ cm. On s'intéresse à la conduction thermique au travers de la couche de plumes.

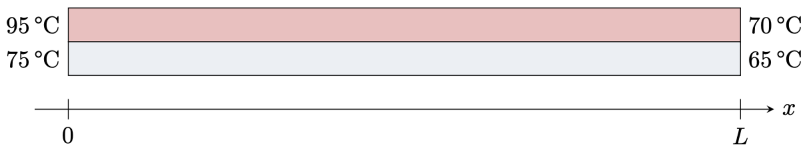
1. Exprimer le flux thermique traversant la couche de plumes en fonction de λ, θ_i, θ_e, e, h et a.
2. Déterminer la conductivité thermique λ du revêtement de plumes.

Pour faire face aux températures extrêmes, les manchots se serrent les uns contre les autres. Ainsi, seules les faces supérieure, inférieure et latérale sont sujettes aux pertes thermiques. On considère neuf manchots se serrant les uns contre les autres.

3. En proposant une disposition prise par ces neuf manchots, exprimer la puissance métabolique totale nécessaire au maintien de la température interne des neuf manchots.
4. De combien le métabolisme, ramené à un seul manchot, est-il réduit par rapport à la situation où le manchot est seul ?

Exercice 5 - Echangeur double flux à contre-courant

A la frontière entre T2 et T3, épreuve B 2020
Cet exercice s'intéresse au dimensionnement d'un échangeur double flux à contre-courant, modélisant par exemple ceux des réseaux de chaleur urbains.
Dans un tel échangeur, deux fluides chaud et froid de débits respectifs D_C et D_F s'écoulent en sens opposés et échangent de l'énergie. On note c la capacité thermique massique des deux fluides, supposés identiques.
On adopte un modèle purement unidimensionnel, l'échange se faisant par l'intermédiaire d'une plaque rectangulaire de largeur a et de longueur $L \gg a$. Les températures des deux fluides sont supposées ne dépendre que de x, à l'exclusion de toute dépendance selon la largeur et la hauteur.



On note respectivement $T_C(x)$ et $T_F(x)$ les températures des fluides chauds et froids à l'abscisse x, et on pose $\Delta T(x) = T_C(x) - T_F(x)$. Le flux thermique surfacique $\Phi(x)$ reçu par le fluide froid, en W.m^{-2}, est donné par la loi de Newton, $\Phi(x) = h\Delta T(x)$, avec h un coefficient d'échange constant.

1. Par étude des températures limites, identifier sur la figure ci-dessus le fluide chaud, le fluide froid, et leur sens d'écoulement.
2. Expliquer l'intérêt d'un échangeur à contre-courant par rapport à un échangeur à co-courant, dans lequel les deux écoulements sont dans le même sens.
3. Déterminer la puissance thermique totale échangée entre les deux fluides en fonction des températures d'entrée et de sortie.
4. Par application du premier principe à un système élémentaire, montrer que les températures des fluides vérifient les équations couplées
$$\frac{dT_C}{dx} = -\frac{ha}{cD_C}\Delta T(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{dT_F}{dx} = -\frac{ha}{cD_F}\Delta T(x)$$
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\Delta T(x)$ et la résoudre.
6. Les températures d'entrée et de sortie ainsi que le débit D_F étant imposées dans le cahier des charges de l'installation, exprimer D_C.

Exercice 6 - Gel d'un lac

Exercice classique mais pas évident, Epreuve A 2022
Lorsque l'air au-dessus d'un lac est à une température $T_a < T_{\text{fus}}$, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement selon la loi $e(t) \propto \sqrt{t}$ aux temps longs. On suppose que l'eau liquide située sous la glace est à la température T_{fus}, supposée uniforme et on note $T(z,t)$ la température de la glace ($0 \leq z \leq e(t)$). On suppose qu'à chaque instant t le profil de température $T(z,t)$ dans la glace est le même que si on était en régime stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires).

Données : Enthalpie massique de fusion de la glace $\ell_{\text{fus}} = 333$ kJ/kg ; capacité thermique massique de la glace $c = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} ; masse volumique de la glace $\mu = 917$ kg.m^{-3} ; conductivité thermique de la glace $\lambda = 2,10$W.m^{-1}.K^{-1}.

On suppose que l'air impose sa température $T_a = -10$°C à la surface du lac.

1. Exprimer la densité de courant thermique j dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.

On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t + dt$.

2. En procédant à un bilan énergétique sur l'épaisseur de d'eau qui gèle entre t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par $e(t)$.
3. La résoudre pour vérifier si ce modèle rend compte de la loi $e(t) \propto \sqrt{t}$ aux temps longs.

Exercice 7 - Les 3 petits cochons au Pôle Nord

Géométrie sphérique avec production interne d'énergie
Au cours d'une expédition polaire, les trois petits cochons décident de construire un igloo de forme hémisphérique. Ils s'accordent sur un rayon intérieur $R = 1$ m et une épaisseur de glace de $e = 30$ cm. L'air extérieur est à la température $T_e = -5$ °C, supposée constante.

Au moment où l'igloo est achevé, le grand méchant loup surgit. Les trois petits cochons se précipitent à l'intérieur de l'igloo et obstruent l'entrée par un dernier morceau de glace.

Un régime stationnaire s'établit alors entre l'intérieur et l'extérieur de l'igloo.
On donne, pour la glace : conductivité thermique $\lambda = 2,0$ W.m^{-1}.K^{-1} ; capacité thermique massique : $c = 2,1$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} ; masse volumique $\rho = 9,2.10^2$ kg/m^3.

Pour simplifier, on néglige tout transfert thermique par le sol.

1. Déterminer le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R + e$.
2. Exprimer puis calculer la résistance thermique de l'igloo.
3. Sachant que chaque petit cochon libère une puissance de 80 W, calculer la température qui règne à l'intérieur de l'igloo.

Le loup se met à souffler mais l'igloo reste en place. Ayant bien remarqué l'absence de cheminée, il se dit que sa seule chance est de continuer à souffler.
On a pour l'instant négligé les transferts conducto-convectif : en réalité, il existe des transferts conducto-convectifs entre l'air intérieur et la paroi intérieure de l'igloo (coefficient de transfert conducto-convectif $h_i = 5,0$ W.m^{-2}.K^{-1}) d'une part et entre l'air extérieur et la paroi extérieure (coefficient de transfert $h_s = 100$ W.m^{-2}.K^{-1} quand le loup souffle, $h_e = 10$ W.m^{-2}.K^{-1} quand il ne souffle plus) d'autre part.

4. Reprendre les questions précédentes, en déterminant également la température sur la paroi interne de l'igloo.
5. Le loup, épuisé, s'arrête de souffler, mais les 3 petits cochons restent enfermés à l'intérieur. La glace fond-elle ? Si oui, de quel côté et sur quelle épaisseur ?

Exercices pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 8 - Bilan thermique d'un astéroïde

Géométrie sphérique, production interne d'énergie
On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R, de conductivité λ, à l'équilibre thermodynamique. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : pendant un temps dt, chaque élément de volume $d\tau$ de l'astéroïde reçoit une énergie $\mathcal{P}d\tau dt$, $\mathcal{P}$ étant une constante. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1. Justifier que la température ne dépend que de r dans l'astéroïde.
2. Calculer le transfert thermique cédé par la sphère de rayon r par conduction, en fonction notamment de la conductivité λ de l'astéroïde et du rayon r de la sphère.
3. Calculer le transfert thermique créé dans la sphère de rayon r par radioactivité.
4. Déduire une relation entre ces transferts thermiques à partir du premier principe infinitésimal.
5. Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, $\mathcal{P}$, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

L'astéroïde émet à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\mathcal{P}_{\text{ray}} = \sigma T_s^4$, avec σ une constante et T_s la température de surface.

6. Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, σ et $\mathcal{P}$.

Exercice 9 - Résolution de problème - Hypothermie

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35 °C.

1. Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17 °C.
2. Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :

- ▷ capacité thermique massique du corps humain : $c_{corps} = 3,5$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} ;
- ▷ résistance thermique de la peau : $R_{peau} = 3.10^{-2}$ K.W^{-1} ;
- ▷ conductivité thermique du néoprène : $\lambda_{néo} = 0,2$ W.m^{-1}.K^{-1} ;
- ▷ puissance produite par le métabolisme : $P_{corps} = 100$ W ;
- ▷ puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) :
  $P_{conv} = \alpha(T_{ext} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10$ W.m^{-2}.K^{-1}.